

ДОКАЗАТЕЛСТВО НА ПОСЛЕДНАТА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА С МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ ПОЗНАНИЯ ОТ ПЪРВАТА ПОЛОВИНА НА 17 ВЕК

Васил Манев

РЕЗЮМЕ

Пиер дьо Ферма е забелязал, че в диофантовото уравнение $a^n + b^n = c^n$, когато n расте, разликата между c^n и $a^n + b^n$ се увеличава, независимо от избора на естествени числа (a, b, c) . Той е бил поразен от това свое откритие и затова е написал „**Аз открих едно наистина прекрасно доказателство**“. Пиер дьо Ферма е осъзнал че разликата $c^n - (a^n + b^n)$ е зависима от степенния показател n . Така той е достигнал до „**понятието функция**“ през 1637 година, преди Лайбниц (1670). Необходимо му е било време за да осмисли напълно „**понятието функция**“ и да запише $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$, но човешкият живот е кратък.

След Пиер дьо Ферма нито един човек не е осъзнал в диофантовото уравнение $a^n + b^n = c^n$ функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$ и затова нито един човек до сега не е достигнал до „**прекрасното доказателство**“, за което той е написал.

Доказателството на Андрю Уайлс и това доказателство ще останат в историята на математиката като нагледен пример за следното:

- **С много знания и малко мислене** Последната теорема на Ферма може да се докаже индиректно, сложно и с много писане, така, че малко хора да разберат доказателството.
- **С малко знания и много мислене** Последната теорема на Ферма може да се докаже директно, просто и с малко писане, така, че всички хора да разберат доказателството.

Когато нещо може да се докаже директно, просто и разбираемо на няколко страници е безумие то да се доказва индиректно, сложно и неразбираемо на стотици страници.

ВЪВЕДЕНИЕ

Постижението на Андрю Уайлс при доказването на Последната теорема на Ферма, публикувано в работата „**Модулни елиптични криви и Последната теорема на Ферма**“ [1] провокира въпроса:

„Това доказателство ли е имал предвид Пиер дьо Ферма, когато през 1637 година на полето на книгата на Диофант [2] е написал на латински [3]:

Не е възможно да се раздели куб на два куба, или четвърта степен на две четвърти степени, или изобщо всяка степен по-висока от втора, на две същи степени. Аз открих едно наистина прекрасно доказателство за това, но това поле е твърде тясно, за да го побере”.

Очевидно е, че изключително сложния индиректен метод на изграждане на доказателството на теоремата, използван от Андрю Уайлс, не изразява нивото на математическите познания в първата половина на 17 век. Следователно, въпросът „Какво доказателство е имал пред вид Пиер дьо Ферма?“ ще продължава да вълнува математическата общност до момента, в който не се появи доказателство на Последната теорема на Ферма, което да даде отговор на този въпрос.

Възможно ли е това да се случи, след като в продължение на 358 години не е намерено друго доказателство, освен представеното от *Андрю Уайлс*? Друга възможност е *Пиер дьо Ферма* да не е намерил доказателство на теоремата си, както се предполага в работата [4], страница 5:

„Той твърдял, че е открил забележително доказателство. Има известно съмнение за това поради различни причини. Първо, тази забележка е била публикувана без негово разрешение, фактически от неговия син, след смъртта му. Второ, в по-късната му кореспонденция Ферма обсъжда случаите за $n = 3$ и 4 , без да се споменава това предполагаемо доказателство. Изглежда, като че ли това е бил един импровизиран коментар, който Ферма е пропуснал да изтрие“.

Този коментар е логически неиздържан, защото:

- *Пиер дьо Ферма* не е знаел, че след смъртта му ще започнат да се интересуват от него и от записките му.
- Той се е занимавал с математика в свободното си време.
- След смъртта му е нямало как синът му да иска разрешение от него за да публикува записките му.
- Това, че в кореспонденцията му, след като е открил теоремата си, са обсъждани случаите за $n = 3$ и $n = 4$ не означава, че той не е открил **прекрасно доказателство** на теоремата си. В кореспонденцията си всеки може да обсъжда всичко, в зависимост от ситуацията.

Като се вземе под внимание, че *Пиер дьо Ферма* е гениален математик, е напълно възможно той да не се е заблудил и да е открил **“наистина прекрасно доказателство”** на теоремата си.

Ако теоремата му се докаже със знанията от неговото време, ще се окаже, че абсолютно всичко написано до сега във връзка с доказателството на *Последната теорема на Ферма* е неправилно.

Тъй като диофантовото уравнение $a^n + b^n = c^n$ е нерешимо в общия случай, следва:

Ако *Пиер дьо Ферма* е открил “наистина прекрасно доказателство” на теоремата си, тогава той е забелязал в равенството $a^n + b^n = c^n$ не диофантовото уравнение, което забелязват всички, а нещо друго.

В следващото съдържание под естествени числа ще разбираме **1, 2, 3, 4, 5, ...**

Теоремата на Питагор може да се представи в следния вид:

За $n = 2$, съществуват естествени числа (a, b, c) , за които е изпълнено уравнението $a^n + b^n = c^n$.

или във вида:

За $n = 2$, съществуват естествени числа (a, b, c) , за които е изпълнено уравнението $c^n - (a^n + b^n) = 0$

Последната теорема на Ферма може да се представи в следния вид:

За $n > 2$, не съществуват естествени числа (a, b, c) , за които е изпълнено уравнението $c^n - (a^n + b^n) = 0$.

от което следва, че за $n > 2$ е изпълнено

$$c^n - (a^n + b^n) \neq 0.$$

Двете равенства $c^n - (a^n + b^n) = 0$ и $c^n - (a^n + b^n) \neq 0$ може да се обединят като запишем

$$c^n - (a^n + b^n) = m \quad (1)$$

където за $n = 2$ е изпълнено $m = 0$, а за $n > 2$ е изпълнено $m \neq 0$.

Прави впечатление, че в (1), където сме обединили двете уравнения (на Питагор и на Ферма) в едно уравнение, при промяната на n от $n = 2$ на $n > 2$, се променя и m от $m = 0$ на $m \neq 0$.

Възникна въпросът:

Това не означава ли, че между n и $m = c^n - (a^n + b^n)$ съществува функционална зависимост $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$, при която независимо от избора на естествените числа (a, b, c) на всяка стойност на n съответства една единствена стойност на $f(n)$ и обратно – на всяка стойност на $f(n)$ съответства една единствена стойност на n ?

Пример 1:

Нека $(a, b, c) = (3, 4, 5)$.

Изпълнено е:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \text{ и } 5^2 - (3^2 + 4^2) = 0$$

$$3^3 + 4^3 < 5^3 \text{ и } 5^3 - (3^3 + 4^3) = 34$$

$$3^4 + 4^4 < 5^4 \text{ и } 5^4 - (3^4 + 4^4) = 288$$

.....

От този пример се вижда, че за естествените числа $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ се получава:

$$f(2) = 0; f(3) = 34; f(4) = 288; \dots; f(n) = m; \dots$$

и е очевидно, че съответствието между n и $f(n)$ е взаимно еднозначно.

Пример 2:

Нека $(a, b, c) = (3, 4, 5)$.

Изпълнено е:

$$9^2 + 40^2 = 41^2 \text{ и } 41^2 - (9^2 + 40^2) = 0$$

$$9^3 + 40^3 < 41^3 \text{ и } 41^3 - (9^3 + 40^3) = 4192$$

$$9^4 + 40^4 < 41^4 \text{ и } 41^4 - (9^4 + 40^4) = 259200$$

.....

От този пример се вижда, че за $(a, b, c) = (9, 40, 41)$ е изпълнено:

$$f(2) = 0; f(3) = 4192; f(4) = 259200; \dots; f(n) = m; \dots$$

и е очевидно, че съответствието между n и $f(n)$ е взаимно еднозначно.

От двата примера (и от всички останали примери, които можем да разгледаме) се вижда:

- Между n и $f(n)$ съществува взаимно еднозначно съответствие, независимо от избора на естествените числа (a, b, c) .
- Когато за $n = 2$ е изпълнено $c^n - (a^n + b^n) = 0$, и n расте, тогава разликата $c^n - (a^n + b^n)$ расте и няма как да се получи равенство $a^n + b^n = c^n$ за $n > 2$, независимо от избора на естествените числа (a, b, c) .

От полученото дотук следва:

Последната теорема на Ферма и теоремата на Питагор можем да обединим във функцията

$$f(n) = c^n - (a^n + b^n) \quad (2)$$

където за n е изпълнено $n \geq 2$.

Може би функцията (2), а не диофантовото уравнение $a^n + b^n = c^n$ е имал пред вид Пиер дьо Ферма, защото, (както ще бъде показано по-долу) ако се използва (2), може да се получи просто и „наистина прекрасно доказателство“ на Последната теорема на Ферма.

Ако е така, това означава, че *Пиер дьо Ферма* е достигнал до понятието „**функция**“ през 1637 година, преди *Лайбниц* (1670).

В настоящата работа се предлага доказателство на *Последната теорема на Ферма*, като се използва функцията (2), но изразена по такъв начин, че да се използват знанията по математика от времето на *Пиер дьо Ферма*, с цел да се покажат две неща:

- *Последната теорема на Ферма* може да се докаже със знанията по математика от времето на *Пиер дьо Ферма*.
- *Пиер дьо Ферма* не е излъгал, не се е заблудил и не е фантазирал, като е записал, че е открил „**наистина прекрасно доказателство**“ на теоремата си.

Съществуват естествени числа (a, b, c) , за които е изпълнена зависимостта

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (3)$$

Пример:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Ако (a, b, c) са три произволно избрани естествените числа, за тях винаги е изпълнена една от следните три зависимости:

$$a^2 + b^2 < c^2 \quad (4)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (5)$$

$$a^2 + b^2 > c^2 \quad (6)$$

Зависимостите (4), (5) и (6) можем да ги запишем по следния начин:

$$c^2 - (a^2 + b^2) > 0$$

$$c^2 - (a^2 + b^2) = 0$$

$$c^2 - (a^2 + b^2) < 0$$

и да ги обединим в една зависимост

$$c^2 - (a^2 + b^2) = m \quad (7)$$

където за m може да бъде изпълнено: $m > 0$; $m = 0$; $m < 0$.

Зависимостта (7) е частен случай на зависимостта (1), защото (7) се получава от (1), за $n = 2$.

План на доказателството:

Част 1: За естествените числа (a, b, c) е изпълнено $a^2 + b^2 < c^2$.

Част 2: За естествените числа (a, b, c) е изпълнено $a^2 + b^2 = c^2$.

Част 3: За естествените числа (a, b, c) е изпълнено $a^2 + b^2 > c^2$.

Част 4: Доказателство на *последната теорема на ферма*, при условие, че за естествените числа (a, b, c) е изпълнена функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Част 5: Заключение.

Ако използваме директно функцията (2), тогава доказателството на *Последната теорема на Ферма* се изразява на няколко реда, но не може да се събере в полето на една страница.

Директното използване на функцията $f(n)$ за доказване на *Последната теорема на Ферма* е направено в **Част 4**.

Сега нашата цел е да друга:

Да се покаже, че за всички естествени числа (a, b, c) представени със зависимостите (4), (5) и (6) съществува функцията

$$f(n) = c^n - (a^n + b^n) \quad (8)$$

при която съответствието между n и $f(n)$ е взаимно еднозначно, независимо от избора на естествените числа (a, b, c) .

ЧАСТ 1

ЗА ЕСТЕСТВЕНИТЕ ЧИСЛА (a, b, c) Е ИЗПЪЛНЕНА ЗАВИСИМОСТТА $a^2 + b^2 < c^2$.

Теорема 1.1

Ако за естествените числа (a, b, c) е изпълнено $a^2 + b^2 < c^2$, то тогава за $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n < c^n$ и не може да бъде изпълнено $a^n + b^n = c^n$.

Доказателство:

Умножаваме двете страни на неравенството $a^2 + b^2 < c^2$ с c^{n-2} и получаваме

$$a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} < c^2 \cdot c^{n-2} \quad (9)$$

От условието $a^2 + b^2 < c^2$ следва $a^2 < c^2$; $b^2 < c^2$, откъдето може да напишем $a^{n-2} < c^{n-2}$; $b^{n-2} < c^{n-2}$.

Умножаваме двете страни на неравенството $a^{n-2} < c^{n-2}$ с a^2 и получаваме

$$a^2 \cdot a^{n-2} < a^2 \cdot c^{n-2}$$

Умножаваме двете страни на неравенството $b^{n-2} < c^{n-2}$ с b^2 и получаваме

$$b^2 \cdot b^{n-2} < b^2 \cdot c^{n-2}$$

Тъй като $a^2 \cdot a^{n-2} < a^2 \cdot c^{n-2}$ и $b^2 \cdot b^{n-2} < b^2 \cdot c^{n-2}$, като заместим в (9), $a^2 \cdot c^{n-2}$ с $a^2 \cdot a^{n-2}$ и $b^2 \cdot c^{n-2}$ с $b^2 \cdot b^{n-2}$ получаваме по-силното неравенство

$$a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2} < c^2 \cdot c^{n-2} \quad (10)$$

От (10) следва:

- За $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n < c^n$.
- Когато n расте, неравенството $a^n + b^n < c^n$ се засилва, при което на всяка стойност на n съответства една единствена стойност на $c^n - (a^n + b^n)$.
- За $n > 2$ не може да бъде изпълнено равенството $a^n + b^n = c^n$.
- Взаимно еднозначното съответствие между n и $c^n - (a^n + b^n)$ се изразява с функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Пример:

Нека $(a, b, c) = (3, 5, 7)$.

Изпълнено е:

$$3^2 + 5^2 < 7^2 \text{ и } 7^2 - (3^2 + 5^2) = 15$$

$$3^3 + 5^3 > 7^3 \text{ и } 7^3 - (3^3 + 5^3) = 191$$

$$3^4 + 5^4 > 7^4 \text{ и } 7^4 - (3^4 + 5^4) = 1695$$

.....

От този пример се вижда, че за $(a, b, c) = (3, 5, 7)$ за естествените се получава:

$$f(2) = 15; f(3) = 191; f(4) = 1695; \dots; f(n) = m; \dots$$

и е очевидно, че в случая за $a^2 + b^2 < c^2$ съответствието между n и $f(n)$ е взаимно еднозначно.

ЧАСТ 2

ЗА ЕСТЕСТВЕНИТЕ ЧИСЛА (a, b, c) Е ИЗПЪЛНЕНА ЗАВИСИМОСТТА $a^2 + b^2 = c^2$.

Теорема 2.1

Ако за естествените числа (a, b, c) е изпълнено $a^2 + b^2 = c^2$, то тогава за всяко

$n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n < c^n$ и не може да бъде изпълнено $a^n + b^n = c^n$.

Доказателство:

От равенството $a^2 + b^2 = c^2$ следва $a^2 < c^2$; $b^2 < c^2$ и $a < c$; $b < c$ и за $n > 2$ е изпълнено:

$$a^{n-2} < c^{n-2} \quad (11)$$

$$b^{n-2} < c^{n-2} \quad (12)$$

Като се умножат двете страни на (11) с a^2 , а двете страни на (12) с b^2 , се получава

$$a^2 \cdot a^{n-2} < a^2 \cdot c^{n-2} \quad (13)$$

$$b^2 \cdot b^{n-2} < b^2 \cdot c^{n-2} \quad (14)$$

Като се съберат левите и десните страни на двете неравенства (13) и (14), се получава

$$a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2} < a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} \quad (15)$$

Като умножим двете страни на равенството $a^2 + b^2 = c^2$ с c^{n-2} , се получава

$$a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} = c^2 \cdot c^{n-2} \quad (16)$$

Като заместим дясната страна на (15) с нейното равно от (16), се получава

$$a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2} < c^2 \cdot c^{n-2} \quad (17)$$

От (17) следва:

- За $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n < c^n$.
- Когато n расте, неравенството $a^n + b^n < c^n$ се засилва, при което на всяка стойност на n съответства една единствена стойност на $c^n - (a^n + b^n)$.
- За $n > 2$ не може да бъде изпълнено равенството $a^n + b^n = c^n$.
- Взаимно еднозначното съответствие между n и $c^n - (a^n + b^n)$ се изразява с функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Пример:

Нека $(a, b, c) = (3, 4, 5)$.

Изпълнено е:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \text{ и } 5^2 - (3^2 + 4^2) = 0$$

$$3^3 + 4^3 < 5^3 \text{ и } 5^3 - (3^3 + 4^3) = 34$$

$$3^4 + 4^4 < 5^4 \text{ и } 5^4 - (3^4 + 4^4) = 288$$

.....

От този пример се вижда, че за $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ за естествените се получава:

$$f(2) = 0; f(3) = 34; f(4) = 288; \dots; f(n) = m; \dots$$

и е очевидно, че в случая за $a^2 + b^2 = c^2$ съответствието между n и $f(n)$ е взаимно еднозначно.

Лема 2.1

Ако за естествените числа s и q е изпълнено $s > q$, когато n расте, тогава разликата $s^n - q^n$ се увеличава.

Доказателство:

Тъй като $s > q$, означаваме:

$$s^1 - q^1 = p_1$$

$$s^2 - q^2 = p_2$$

$$s^3 - q^3 = p_3$$

$$s^4 - q^4 = p_4$$

.....

$$s^n - q^n = p_n$$

.....

При въведените означения може да се запише

$$\begin{aligned}
s^1 - q^1 &= s - q = p_1 \\
s^2 - q^2 &= (s - q) \cdot (s + q) = p_2 \\
s^3 - q^3 &= (s - q) \cdot (s^2 + s \cdot q + q^2) = p_3 \\
s^4 - q^4 &= (s - q) \cdot (s^3 + s^2 \cdot q + s \cdot q^2 + q^3) = p_4 \\
&\dots\dots\dots \\
s^n - q^n &= (s - q) \cdot (s^{n-1} + s^{n-2} \cdot q + s^{n-3} \cdot q^2 + \dots + s \cdot q^{n-2} + q^{n-1}) = p_n
\end{aligned} \tag{18}$$

Като се вземе под внимание, че s и q са естествени числа и че $s - q = p_1 > 0$, следва:
 $0 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \dots < p_n \dots$

Теорема 2.2

Ако за естествените числа (a, b, c) при $n = 2$ е изпълнено $c^n - (a^n + b^n) = 0$, когато n расте от стойност 2 и клони към безкрайност, тогава разликата $c^n - (a^n + b^n)$ расте от стойност 0 и клони към безкрайност.

Доказателство:

Ако в (18) положим $s = c$ и $q = a$, за степен $n - 2$ се получава:

$$c^{n-2} - a^{n-2} = (c - a) \cdot (c^{n-3} + c^{n-4} \cdot a + c^{n-5} \cdot a^2 + \dots + c \cdot a^{n-4} + a^{n-3}) = p_{an} \tag{19}$$

Ако в (18) положим $s = c$ и $q = b$, за степен $n - 2$ се получава:

$$c^{n-2} - b^{n-2} = (c - b) \cdot (c^{n-3} + c^{n-4} \cdot b + c^{n-5} \cdot b^2 + \dots + c \cdot b^{n-4} + b^{n-3}) = p_{bn} \tag{20}$$

Като умножим двете страни на (19) с a^2 и двете страни на (20) с b^2 , се получава

$$a^2 \cdot c^{n-2} - a^2 \cdot a^{n-2} = a^2 \cdot p_{an} \tag{21}$$

$$b^2 \cdot c^{n-2} - b^2 \cdot b^{n-2} = b^2 \cdot p_{bn} \tag{22}$$

Като се съберат двете страни на (21) и (22), се получава

$$a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} - (a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2}) = a^2 \cdot p_{an} + b^2 \cdot p_{bn}$$

$$c^{n-2} \cdot (a^2 + b^2) - (a^n + b^n) = a^2 \cdot p_{an} + b^2 \cdot p_{bn}$$

Като се вземе под внимание, че по условие е изпълнено $a^2 + b^2 = c^2$, следва

$$c^{n-2} \cdot c^2 - (a^n + b^n) = a^2 \cdot p_{an} + b^2 \cdot p_{bn}$$

$$c^n - (a^n + b^n) = a^2 \cdot p_{an} + b^2 \cdot p_{bn}$$

Тъй като съгласно Лема 2.1, p_{an} и p_{bn} растат, когато расте n следва, че когато n расте от начална стойност $n = 2$ и клони към безкрайност, тогава разликата $c^n - (a^n + b^n)$ расте от начална стойност 0 и клони към безкрайност.

Теорема 2.3

Ако за $n = 2$ е изпълнено $a^n + b^n = c^n$, то тогава

- За $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n < c^n$.
- За $n < 2$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$.
- За $n > 2$ и $n < 2$ не може да бъде изпълнено $a^n + b^n = c^n$.

Доказателство:

Съгласно Теорема 2.1, ако за $n = 2$ е изпълнено $a^n + b^n = c^n$, когато n расте (за $n > 2$) е изпълнено $a^n + b^n < c^n$ и не може да бъде изпълнено $a^n + b^n = c^n$. В този случай между n и $c^n - (a^n + b^n)$ съществува взаимно еднозначно съответствие, което се изразява с функцията

$$f(n) = c^n - (a^n + b^n).$$

За $n < 2$ е възможна една единствена стойност за n ($n = 1$), на която съответства една единствена стойност на функцията $f(1) = c^1 - (a^1 + b^1)$.

За $n = 2$ е възможна една единствена стойност на функцията $f(2) = c^2 - (a^2 + b^2)$.

Пример:

$$\begin{aligned}
3^1 + 4^1 &> 5^1 \text{ и } 5^1 - (3^1 + 4^1) = -2 \\
3^2 + 4^2 &= 5^2 \text{ и } 5^2 - (3^2 + 4^2) = 0 \\
3^3 + 4^3 &< 5^3 \text{ и } 5^3 - (3^3 + 4^3) = 34 \\
3^4 + 4^4 &< 5^4 \text{ и } 5^4 - (3^4 + 4^4) = 288 \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

До тук ние изследвахме естествените числа (a, b, c) , когато за техните втори степени са изпълнени зависимостите $a^2 + b^2 < c^2$, $a^2 + b^2 = c^2$ и доказахме, че и в двата случая:

- За $n > 2$, равенството $a^n + b^n = c^n$ не може да бъде изпълнено в естествени числа (a, b, c) .
- Между n и $c^n - (a^n + b^n)$ съществува взаимно еднозначно съответствие, което се изразява с функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

ЧАСТ 3

ЗА ЕСТЕСТВЕНИТЕ ЧИСЛА (a, b, c) Е ИЗПЪЛНЕНА ЗАВИСИМОСТТА $a^2 + b^2 > c^2$.

От зависимостта $a^2 + b^2 > c^2$, следват 9 случая:

$$\begin{aligned}
a^2 &> c^2; b^2 > c^2 \\
a^2 &> c^2; b^2 < c^2 \\
a^2 &< c^2; b^2 > c^2 \\
a^2 &> c^2; b^2 = c^2 \\
a^2 &= c^2; b^2 > c^2 \\
a^2 &= c^2; b^2 < c^2 \\
a^2 &< c^2; b^2 = c^2 \\
a^2 &= c^2; b^2 = c^2 \\
a^2 &< c^2; b^2 < c^2
\end{aligned}$$

ОТ КОИТО:

- Третият случай се свежда до втория.
- Петият случай се свежда до четвъртия.
- Седмият случай се свежда до шестия.

и остават за разглеждане само 6 случая:

$$\begin{aligned}
a^2 &> c^2; b^2 > c^2 \\
a^2 &> c^2; b^2 < c^2 \\
a^2 &> c^2; b^2 = c^2 \\
a^2 &= c^2; b^2 < c^2 \\
a^2 &= c^2; b^2 = c^2 \\
a^2 &< c^2; b^2 < c^2
\end{aligned}$$

Случай 1:

$$a^2 + b^2 > c^2 \text{ и } a^2 > c^2; b^2 > c^2.$$

Теорема 3.1

Ако (a, b, c) са естествени числа, за които е изпълнено $a^2 + b^2 > c^2$ и $a^2 > c^2; b^2 > c^2$, когато n расте, за $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$ и не може да бъде изпълнено $a^n + b^n = c^n$.

Доказателство:

От $a^2 > c^2; b^2 > c^2$ следва: $a^{n-2} > c^{n-2}, b^{n-2} > c^{n-2}$, за $n > 2$.

Като умножим двете страни на неравенството $a^2 + b^2 > c^2$ с c^{n-2} получаваме

$$a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} > c^2 \cdot c^{n-2} \quad (23)$$

Като умножим двете страни на неравенството $a^{n-2} > c^{n-2}$ с a^2 получаваме

$$a^2 \cdot a^{n-2} > a^2 \cdot c^{n-2}$$

Като умножим двете страни на неравенството $b^{n-2} > c^{n-2}$ с b^2 получаваме

$$b^2 \cdot b^{n-2} > b^2 \cdot c^{n-2}$$

Тъй като $a^2 \cdot a^{n-2} > a^2 \cdot c^{n-2}$ и $b^2 \cdot b^{n-2} > b^2 \cdot c^{n-2}$, като заместим в (23), $a^2 \cdot c^{n-2}$ с $a^2 \cdot a^{n-2}$ и $b^2 \cdot c^{n-2}$ с $b^2 \cdot b^{n-2}$ получаваме по-силното неравенство

$$a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2} > c^2 \cdot c^{n-2} \quad (24)$$

От (24) следва:

- За $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$.
- Когато n расте, неравенството $a^n + b^n > c^n$ се засилва, при което на всяка стойност на n съответства една единствена стойност на $c^n - (a^n + b^n)$.
- За $n > 2$ не може да бъде изпълнено равенството $a^n + b^n = c^n$.
- Взаимно еднозначното съответствие между n и $c^n - (a^n + b^n)$ се изразява с функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Пример:

$$4^2 + 5^2 > 3^2 \text{ и } 3^2 - (4^2 + 5^2) = -32$$

$$4^3 + 5^3 > 3^3 \text{ и } 3^3 - (4^3 + 5^3) = -164$$

$$4^4 + 5^4 > 3^4 \text{ и } 3^4 - (4^4 + 5^4) = -800$$

.....

Случай 2

$$a^2 + b^2 > c^2; a^2 > c^2; b^2 < c^2$$

Теорема 3.2

Ако (a, b, c) са естествени числа, за които е изпълнено $a^2 + b^2 > c^2$; $a^2 > c^2$; $b^2 < c^2$, когато n расте, за $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$ и не може да бъде изпълнено $a^n + b^n = c^n$.

Доказателство:

От $a^2 > c^2$; $b^2 < c^2$ следва: $a^{n-2} > c^{n-2}$; $b^{n-2} < c^{n-2}$, за $n > 2$.

Като умножим двете страни на неравенството $a^2 + b^2 > c^2$ с c^{n-2} получаваме

$$a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} > c^2 \cdot c^{n-2} \quad (25)$$

Като умножим двете страни на неравенството $a^{n-2} > c^{n-2}$ с a^2 получаваме

$$a^2 \cdot a^{n-2} > a^2 \cdot c^{n-2}$$

Като умножим двете страни на неравенството $b^{n-2} < c^{n-2}$ с b^2 получаваме

$$b^2 \cdot b^{n-2} < b^2 \cdot c^{n-2}$$

Тъй като $a^2 \cdot a^{n-2} > a^2 \cdot c^{n-2}$ (независимо от това, колко е голямо $b^2 \cdot b^{n-2}$), като заместим в (25), $a^2 \cdot c^{n-2}$ с $a^2 \cdot a^{n-2}$ и $b^2 \cdot c^{n-2}$ с $b^2 \cdot b^{n-2}$ получаваме

$$a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2} > c^2 \cdot c^{n-2} \quad (26)$$

От (26) следва:

- За $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$.
- Когато n расте, неравенството $a^n + b^n > c^n$ се засилва, при което на всяка стойност на n съответства една единствена стойност на $c^n - (a^n + b^n)$.
- За $n > 2$ не може да бъде изпълнено равенството $a^n + b^n = c^n$.
- Взаимно еднозначното съответствие между n и $c^n - (a^n + b^n)$ се изразява с функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Пример:

$$7^2 + 3^2 > 5^2 \text{ и } 5^2 - (7^2 + 3^2) = -34$$

$$7^3 + 3^3 > 5^3 \text{ и } 5^3 - (7^3 + 3^3) = -245$$

$$7^4 + 3^4 > 5^4 \text{ и } 5^4 - (7^4 + 3^4) = -1857$$

.....

Случай 3

$$a^2 + b^2 > c^2; a^2 > c^2; b^2 = c^2$$

Теорема 3.3

Ако (a, b, c) са естествени числа, за които е изпълнено $a^2 + b^2 > c^2$; $a^2 > c^2$; $b^2 = c^2$, когато n расте, за $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$ и не може да бъде изпълнено $a^n + b^n = c^n$.

Доказателство:

От $a^2 > c^2$; $b^2 = c^2$ следва: $a^{n-2} > c^{n-2}$, $b^{n-2} = c^{n-2}$, за $n > 2$.

Като умножим двете страни на неравенството $a^2 + b^2 > c^2$ с c^{n-2} получаваме

$$a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} > c^2 \cdot c^{n-2} \quad (27)$$

Като умножим двете страни на неравенството $a^{n-2} > c^{n-2}$ с a^2 получаваме

$$a^2 \cdot a^{n-2} > a^2 \cdot c^{n-2}$$

Като умножим двете страни на равенството $b^{n-2} = c^{n-2}$ с b^2 получаваме

$$b^2 \cdot b^{n-2} = b^2 \cdot c^{n-2}$$

Тъй като $a^2 \cdot a^{n-2} > a^2 \cdot c^{n-2}$ и $b^2 \cdot b^{n-2} = b^2 \cdot c^{n-2}$, като заместим в (27), $a^2 \cdot c^{n-2}$ с $a^2 \cdot a^{n-2}$ и $b^2 \cdot c^{n-2}$ с $b^2 \cdot b^{n-2}$ получаваме

$$a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2} > c^2 \cdot c^{n-2} \quad (28)$$

От (28) следва:

- За $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$.
- Когато n расте, неравенството $a^n + b^n > c^n$ се засилва, при което на всяка стойност на n съответства една единствена стойност на $c^n - (a^n + b^n)$.
- За $n > 2$ не може да бъде изпълнено равенството $a^n + b^n = c^n$.
- Взаимно еднозначното съответствие между n и $c^n - (a^n + b^n)$ се изразява с функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Пример:

$$7^2 + 5^2 > 5^2 \text{ и } 5^2 - (7^2 + 5^2) = -49$$

$$7^3 + 5^3 > 5^3 \text{ и } 5^3 - (7^3 + 5^3) = -343$$

$$7^4 + 5^4 > 5^4 \text{ и } 5^4 - (7^4 + 5^4) = -2401$$

.....

Случай 4

$$a^2 + b^2 > c^2; a^2 = c^2; b^2 < c^2$$

Теорема 3.4

Ако (a, b, c) са естествени числа, за които е изпълнено $a^2 + b^2 > c^2$; $a^2 = c^2$; $b^2 < c^2$, когато n расте, за $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$ и не може да се получи $a^n + b^n = c^n$.

Доказателство:

От $a^2 = c^2$; $b^2 < c^2$ следва: $a^{n-2} = c^{n-2}$, $b^{n-2} < c^{n-2}$, за $n > 2$.

Като умножим двете страни на неравенството $a^2 + b^2 > c^2$ с c^{n-2} се получава

$$a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} > c^2 \cdot c^{n-2} \quad (29)$$

Като умножим двете страни на равенството $a^{n-2} = c^{n-2}$ с a^2 получаваме

$$a^2 \cdot a^{n-2} = a^2 \cdot c^{n-2}$$

Като умножим двете страни на неравенството $b^{n-2} < c^{n-2}$ с b^2 получаваме

$$b^2 \cdot b^{n-2} < b^2 \cdot c^{n-2}$$

Тъй като $a^2 \cdot a^{n-2} = a^2 \cdot c^{n-2}$ и $b^2 \cdot b^{n-2} < b^2 \cdot c^{n-2}$, като заместим в (29), $a^2 \cdot c^{n-2}$ с $a^2 \cdot a^{n-2}$ и $b^2 \cdot c^{n-2}$ с $b^2 \cdot b^{n-2}$ получаваме

$$a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2} > c^2 \cdot c^{n-2} \quad (30)$$

От (30) следва:

- За $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$.
- Когато n расте, неравенството $a^n + b^n > c^n$ се засилва, при което на всяка стойност на n съответства една единствена стойност на $c^n - (a^n + b^n)$.
- За $n > 2$ не може да бъде изпълнено равенството $a^n + b^n = c^n$.
- Взаимно еднозначното съответствие между n и $c^n - (a^n + b^n)$ се изразява с функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Пример:

$$5^2 + 7^2 > 5^2 \text{ и } 5^2 - (5^2 + 7^2) = -49$$

$$5^3 + 7^3 > 5^3 \text{ и } 5^3 - (5^3 + 7^3) = -343$$

$$5^4 + 7^4 > 5^4 \text{ и } 5^4 - (5^4 + 7^4) = -2401$$

.....

Случай 5

$$a^2 + b^2 > c^2; a^2 = c^2; b^2 = c^2$$

Теорема 3.5

Ако (a, b, c) са естествени числа, за които е изпълнено $a^2 + b^2 > c^2$; $a^2 = c^2$; $b^2 = c^2$, когато n расте, за $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$ и не може да бъде изпълнено $a^n + b^n = c^n$.

Доказателство:

От $a^2 = c^2$; $b^2 = c^2$ следва: $a^{n-2} = b^{n-2} = c^{n-2}$, за $n > 2$.

Като умножим двете страни на неравенството $a^2 + b^2 > c^2$ с c^{n-2} получаваме

$$a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} > c^2 \cdot c^{n-2} \quad (31)$$

Като умножим двете страни на равенството $a^{n-2} = c^{n-2}$ с a^2 получаваме

$$a^2 \cdot a^{n-2} = a^2 \cdot c^{n-2}$$

Като умножим двете страни на равенството $b^{n-2} = c^{n-2}$ с b^2 получаваме

$$b^2 \cdot b^{n-2} = b^2 \cdot c^{n-2}$$

Като заместим в (31), $a^2 \cdot c^{n-2}$ с $a^2 \cdot c^{n-2}$ и $b^2 \cdot c^{n-2}$ с $b^2 \cdot c^{n-2}$ получаваме по-засиленото неравенство

$$c^2 \cdot c^{n-2} + c^2 \cdot c^{n-2} > c^2 \cdot c^{n-2} \quad (32)$$

От (32) следва:

- За $n > 2$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$.
- Когато n расте, неравенството $a^n + b^n > c^n$ се засилва, при което на всяка стойност на n съответства една единствена стойност на $c^n - (a^n + b^n)$.
- За $n > 2$ не може да бъде изпълнено равенството $a^n + b^n = c^n$.
- Взаимно еднозначното съответствие между n и $c^n - (a^n + b^n)$ се изразява от функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Пример:

$$5^2 + 5^2 > 5^2 \text{ и } 5^2 - (5^2 + 5^2) = -25$$

$$5^3 + 5^3 > 5^3 \text{ и } 5^3 - (5^3 + 5^3) = -125$$

$$5^4 + 5^4 > 5^4 \text{ и } 5^4 - (5^4 + 5^4) = -625$$

.....

От разгледаните пет случая

$$a^2 > c^2; b^2 > c^2$$

$$a^2 > c^2; b^2 < c^2$$

$$a^2 > c^2; b^2 = c^2$$

$$a^2 = c^2; b^2 < c^2$$

$$a^2 = c^2; b^2 = c^2$$

при условието $a^2 + b^2 > c^2$ следва:

- За $n > 2$ е изпълнено неравенството $a^n + b^n > c^n$.
- За $n > 2$ не може да бъде изпълнено равенството $a^n + b^n = c^n$.
- Когато n расте (за $n > 2$), разликата между c^n и $a^n + b^n$ се увеличава.
- Между n и $c^n - (a^n + b^n)$ съществува взаимно еднозначно съответствие, което се изразява от функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Остана за разглеждане шестият (последен) случай, който е по-специален от другите и затова той заслужава повече внимание.

Случай 6:

$$a^2 + b^2 > c^2 \text{ и } a^2 < c^2; b^2 < c^2$$

Теорема 3.6

Ако (a, b, c) са естествени числа, за които е изпълнено $a^2 + b^2 > c^2; a^2 < c^2; b^2 < c^2$, когато n расте, за $n > 2$ съществува стойност на n ($n = k$) тъй че:

- За $n \leq k$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$.
- За $n > k$ е изпълнено $a^n + b^n < c^n$.
- За $n = k$ не може да бъде изпълнено $a^n + b^n = c^n$.
- Стойността на n ($n = k$) след която неравенството $a^n + b^n > c^n$ обръща посоката си е зависима от естествените числа (a, b, c) .

Доказателство:

Съгласно Лема 2.1:

- Когато n расте, за $n > 2$ разликата между c^n и a^n се увеличава (c^n расте по-бързо от a^n).
- Когато n расте, за $n > 2$ разликата между c^n и b^n се увеличава (c^n расте по-бързо от b^n).

Това означава:

Когато n расте (при $a^2 + b^2 > c^2$ и $a^2 < c^2; b^2 < c^2$) съществува стойност на n ($n = k + 1$), при която неравенството $a^n + b^n > c^n$ обръща посоката си и придобива вида $a^n + b^n < c^n$.

Пример 1:

$$7^2 + 8^2 > 9^2 \text{ и } 9^2 - (7^2 + 8^2) = -32$$

$$7^3 + 8^3 > 9^3 \text{ и } 9^3 - (7^3 + 8^3) = -126$$

$$7^4 + 8^4 < 9^4 \text{ и } 9^4 - (7^4 + 8^4) = 64$$

$$7^5 + 8^5 < 9^5 \text{ и } 9^5 - (7^5 + 8^5) = 9474$$

$$7^6 + 8^6 < 9^6 \text{ и } 9^6 - (7^6 + 8^6) = 151648$$

.....

От този пример следва:

- $9^3 - (7^3 + 8^3) < 9^2 - (7^2 + 8^2)$.
- $9^4 - (7^4 + 8^4) < 9^5 - (7^5 + 8^5) < 9^6 - (7^6 + 8^6) < \dots$
- Стойността на n , след която неравенството $7^n + 8^n > 9^n$ обръща посоката си, е $k = 3$.

- За $n > 3$ е изпълнено $7^n + 8^n < 9^n$.
- За $n > 3$, когато n расте, неравенството $7^n + 8^n < 9^n$ се засилва, при което на всяка стойност на n съответства една единствена стойност на $9^n - (7^n + 8^n)$.
- За $n > 3$ не може да бъде изпълнено равенството $7^n + 8^n = 9^n$.
- Взаимно еднозначното съответствие между n и $9^n - (7^n + 8^n)$ се изразява от функцията $f(n) = 9^n - (7^n + 8^n)$.

Пример 2:

$$19^2 + 20^2 > 21^2 \text{ и } 21^2 - (19^2 + 20^2) = -320$$

$$19^3 + 20^3 > 21^3 \text{ и } 21^3 - (19^3 + 20^3) = -5598$$

$$19^4 + 20^4 > 21^4 \text{ и } 21^4 - (19^4 + 20^4) = -95840$$

$$19^5 + 20^5 > 21^5 \text{ и } 21^5 - (19^5 + 20^5) = -1591998$$

$$19^6 + 20^6 > 21^6 \text{ и } 21^6 - (19^6 + 20^6) = -25279760$$

$$19^7 + 20^7 > 21^7 \text{ и } 21^7 - (19^7 + 20^7) = -372783198$$

$$19^8 + 20^8 > 21^8 \text{ и } 21^8 - (19^8 + 20^8) = -4760703680$$

$$19^9 + 20^9 > 21^9 \text{ и } 21^9 - (19^9 + 20^9) = -40407651198$$

$$19^{10} + 20^{10} < 21^{10} \text{ и } 21^{10} - (19^{10} + 20^{10}) = 308814720400$$

$$19^{11} + 20^{11} < 21^{11} \text{ и } 21^{11} - (19^{11} + 20^{11}) = 28987241644002$$

$$19^{12} + 20^{12} < 21^{12} \text{ и } 21^{12} - (19^{12} + 20^{12}) = 1046512592320480$$

$$19^{13} + 20^{13} < 21^{13} \text{ и } 21^{13} - (19^{13} + 20^{13}) = 30499394276862402$$

.....

От този пример следва:

- $21^9 - (19^9 + 20^9) < 21^8 - (19^8 + 20^8) < 21^7 - (19^7 + 20^7) < 21^6 - (19^6 + 20^6) < 21^5 - (19^5 + 20^5) < 21^4 - (19^4 + 20^4) < 21^3 - (19^3 + 20^3) < 21^2 - (19^2 + 20^2)$
- $21^{10} - (19^{10} + 20^{10}) < 21^{11} - (19^{11} + 20^{11}) < (19^{12} + 20^{12}) < 21^{13} - (19^{13} + 20^{13}) < \dots$
- Стойността на n след която неравенството $19^n + 20^n > 21^n$ обръща посоката си е, $k = 9$.
- За $n > 9$ е изпълнено $19^n + 20^n < 21^n$.
- За $n > 9$, когато n расте, неравенството $19^n + 20^n < 21^n$ се засилва, при което на всяка стойност на n съответства една единствена стойност на $21^n - (19^n + 20^n)$.
- За $n > 9$ не може да бъде изпълнено равенството $19^n + 20^n = 21^n$.
- Взаимно еднозначното съответствие между n и $21^n - (19^n + 20^n)$ се изразява от функцията $f(n) = 21^n - (19^n + 20^n)$.

От двата примера (и от всички останали примери, които можем да разгледаме) се вижда, че когато n расте, при условието $a^2 + b^2 > c^2$ и $a^2 < c^2$; $b^2 < c^2$:

- От неравенството $a^n + b^n > c^n$ (за $n < k$) се преминава в неравенството $a^n + b^n < c^n$ (за $n > k$), без да се преминава през равенството $a^n + b^n = c^n$ (за $n = k$).
- За $n > k$ е изпълнено $a^n + b^n < c^n$.
- За $n \leq k$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$.
- Стойността на n , ($n = k$), след която неравенството $a^n + b^n > c^n$ обръща посоката си, е зависимо от избора на естествените числа (a, b, c) .
- Между n и $c^n - (a^n + b^n)$ съществува взаимно еднозначно съответствие, което се изразява с функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Неравенство $a^n + b^n < c^n$ го изследвахме в *Част 1*.

От *Теорема 1.1* и полученото по-горе следва:

- За $n > k$ е изпълнено $a^n + b^n < c^n$.
- За $n > k$, когато n расте, неравенството $a^n + b^n < c^n$ се засилва, при което на всяка стойност на n съответства една единствена стойност на $c^n - (a^n + b^n)$.
- За $n > k$ не може да бъде изпълнено равенството $a^n + b^n = c^n$.
- Взаимно еднозначното съответствие между n и $c^n - (a^n + b^n)$ се изразява от функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Остана за изследване само неравенството $a^n + b^n > c^n$, за $n \leq k$.

От $a^2 + b^2 > c^2$ следва:

$$c^2 - (a^2 + b^2) < 0 \quad (33)$$

Умножаваме двете страни на (33) с c и получаваме

$$c^2 \cdot c - (a^2 \cdot c + b^2 \cdot c) < 0 \quad (34)$$

Изпълнено е

$$c^2 \cdot c - (a^2 \cdot c + b^2 \cdot c) < c^2 - (a^2 + b^2) < 0$$

От $a^2 < c^2$; $b^2 < c^2$ получаваме $a < c$; $b < c$.

Понеже $a < c$; $b < c$ следва $a^2 \cdot a < a^2 \cdot c$; $b^2 \cdot b < b^2 \cdot c$.

Като заместим в (34) $a^2 \cdot c$ с $a^2 \cdot a$; $b^2 \cdot c$ с $b^2 \cdot b$, получаваме

$$c^2 \cdot c - (a^2 \cdot a + b^2 \cdot b) < 0 \quad (35)$$

тъй като $a^2 \cdot a + b^2 \cdot b < a^2 \cdot c + b^2 \cdot c$ следва

$$c^2 \cdot c - (a^2 \cdot a + b^2 \cdot b) < c^2 \cdot c - (a^2 \cdot c + b^2 \cdot c) < c^2 - (a^2 + b^2) < 0$$

$$c^3 - (a^3 + b^3) < c^2 - (a^2 + b^2)$$

По същия начин получаваме

$$c^k - (a^k + b^k) < \dots < c^4 - (a^4 + b^4) < c^3 - (a^3 + b^3) < c^2 - (a^2 + b^2) < 0 \quad (36)$$

Когато n расте в затворения интервал $[2, k]$, тогава разликата между c^n и $a^n + b^n$ се увеличава и не може да се получи равенство. За $n > k$ неравенството обръща посоката си. Този случай сме го изследвали в *Част 1* и при него, когато n расте от стойност $n = k + 1$ до безкрайност, разликата между c^n и $a^n + b^n$ се увеличава и не може да се получи равенство.

Тъй като на всяка стойност на n за $n \in [2, k]$ и $n > k$, съответства една единствена стойност на $c^n - (a^n + b^n)$, следва, че между n и $c^n - (a^n + b^n)$ съществува взаимно еднозначно съответствие, което се изразява с функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

От полученото дотук за $n > 2$ и $n < k + 1$, когато n расте, при $a^2 + b^2 > c^2$ и $a^2 < c^2$; $b^2 < c^2$, следва:

- От неравенството $a^n + b^n > c^n$ (за $n < k$) се преминава в неравенството $a^n + b^n < c^n$ (за $n > k$), без да се преминава през равенството $a^n + b^n = c^n$ (за $n = k$).
- За $n > k$ е изпълнено $a^n + b^n < c^n$.
- За $n \leq k$ е изпълнено $a^n + b^n > c^n$.
- Стойността на n ($n = k$), при която неравенството $a^n + b^n > c^n$ обръща посоката си, е зависима от избора на естествените числа (a, b, c) (няма друго в израза $c^n - (a^n + b^n)$, от което може да зависи k).
- Между n и $c^n - (a^n + b^n)$ съществува взаимно еднозначно съответствие, което се изразява от функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Ние изследвахме естествените числа (a, b, c) , когато за техните втори степени са изпълнени зависимостите $a^2 + b^2 < c^2$, $a^2 + b^2 = c^2$, $a^2 + b^2 > c^2$ и доказахме, че във всички случаи:

- За $n > 2$, равенството $a^n + b^n = c^n$ не може да бъде изпълнено в естествени числа (a, b, c) .
- Между n и $c^n - (a^n + b^n)$ съществува взаимно еднозначно съответствие, което се изразява с функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Това означава:

- Равенството $a^n + b^n = c^n$ е възможно в естествени числа (a, b, c) единствено за $n = 2$.
- Равенството $a^n + b^n = c^n$ е невъзможно в естествени числа (a, b, c) за $n > 2$.

С това, най-пълното, най-точното, най-последователното и най-общото доказателство на **Последната теорема на Ферма**, с математическите познания от първата половина на 17 век, е завършено.

ЧАСТ 4

ДОКАЗАТЕЛСТВО НА ПОСЛЕДНАТА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА, ПРИ УСЛОВИЕ, ЧЕ ЗА ЕСТЕСТВЕНИТЕ ЧИСЛА (a, b, c) Е ИЗПЪЛНЕНА ФУНКЦИЯТА $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$.

Съществуването на функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$ и на взаимно еднозначното съответствие между n и $f(n)$ е очевидно и не се нуждае от доказателство.

Да доказваме съществуването на функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$ е равносилно да доказваме съществуването на функцията $f(x) = a.x^2 + b.x + c$.

Независимо от това, доказателствата, които направихме в *Част 1*, *Част 2* и *Част 3* бяха необходими за да се осъзнае съществуването на функцията $f(n) = c^n - (a^n + b^n)$ и на нейните невероятни свойства.

Тук променливата величина е n , а не естествените числа (a, b, c) .

Естествените числа (a, b, c) се избират произволно. Когато се изменя n , се изменя функцията $f(n)$, а не естествените числа (a, b, c) (аргументът е n). При изменението на n се изменя функцията, но така, че на всяка стойност на аргумента n съответства една единствена стойност на функцията $f(n)$ и на всяка стойност на функцията $f(n)$ съответства една единствена стойност на аргумента n .

От полученото дотук следва:

- За $n = 2$ съществуват естествени числа (a, b, c) , за които е изпълнено $f(n) = 0$.
- За $n > 2$ не съществуват естествени числа (a, b, c) , за които е изпълнено $f(n) = 0$.

Последна теорема на Ферма

Равенството $a^n + b^n = c^n$ е невъзможно в естествени числа (a, b, c) за $n > 2$.

Доказателство:

От това, че за естествените числа (a, b, c) при $n = 2$ е изпълнено $f(2) = 0$ следва, че за $n > 2$ не може да бъде изпълнено $f(n) = 0$, тъй като се нарушава взаимно еднозначното съответствие между n и $f(n)$.

При избрани естествени числа (a, b, c) не може на две различни стойности на n ($n = 2$ и $n = k > 2$) да се съпоставя една и съща стойност на $f(n)$ ($f(2) = 0$ и $f(k) = 0$).

На една стойност на n може да се съпоставят различни стойности на $f(n)$, само когато се променят естествените числа (a, b, c) .

С това доказателството на *Последната теорема на Ферма* е завършено.

Очевидно е, че **Пиер дьо Ферма** е бил прав, като е записал, че доказателството на теоремата му не може да се побере в полето на страницата със знанията от неговото време, но като се използва понятието **функция**, доказателството може да се побере в полето на една страница.

ЧАСТ 5

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Оказа се, че простото доказателство, за което споменава **Пиер дьо Ферма** съществува.

Това означава:

Пиер дьо Ферма не е излъгал, не се е заблудил и не е фантазирал, като е написал, че е открил „наистина прекрасно доказателство“ на теоремата си.

Дори нещо повече:

Пиер дьо Ферма е първият човек на *Земята*, достигнал до понятието „**функция**“.

Представеното, в настоящата работа, доказателство на *Последната теорема на Ферма* ни дава основание да отбележим следното:

- Доказателството на *Последната теорема на Ферма* е възможно да бъде осъществено, като се използват математическите знания от първата половина на 17 век, тъй като в горните разсъждения понятието „**функция**“ може да се избегне.

- Пиер дьо Ферма** е бил наясно, че диофантовото уравнение $a^n + b^n = c^n$ може да се представи като функция, което прави доказателството на теоремата му „**наистина прекрасно**“.

Може би **Пиер дьо Ферма** не е публикувал доказателството си, защото той е искал да го свърже с понятието „**функция**“, но тъй като не е успял да го дефинира по подходящ начин до края на живота си, доказателството е останало непубликувано.

Надяваме се, че по този начин сме успели да защитим авторитета на **Пиер дьо Ферма** и да отстраним съмненията в неговата гениалност, които възникнаха след доказателството на *Андрю Уайлс* и твърдението, че само посредствени, с „**неуспешна кариера**“ хора, могат да търсят просто доказателство на *Последната теорема на Ферма* [5].

По този начин **Пиер дьо Ферма** бе поставен на нивото на посредствените хора, защото той е юрист по образование и не само, че е търсил просто доказателство на теоремата си, но дори е написал „**Аз открих едно наистина прекрасно доказателство за това, но това поле е твърде тясно, за да го побере**“.

Ние обикновените хора трябва да се научим да уважаваме гениалността.

Авторът изразява своята благодарност на:

Ненко Иванов, Александър Иванов, Тодор Пенчев, Стефко Банев, които в първоначалните разисквания по ръкописа дадоха своите полезни забележки и помогнаха тази работа да придобие завършен вид.

Литература

[1]. Wiles Andrew, *Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem*, *Annals of Mathematics*, 1995, 142 (3), 443 – 551.

[2]. Diophanti Alexandrini, *Arithmeticum*, 1621.

- [3]. T. Heath, *Diophantus of Alexandria*, Cambridge University Press, 1910, reprinted by Dover, NY, 1964, 144-145.
- [4]. Nigel Boston, *The Proof of Fermat's Last Theorem*, University of Wisconsin-Madison, 2003.
- [5]. Singh S (October 1998). *Fermat's Enigma*. New York: Anchor Books. ISBN 978-0-385-49362-8, 295 - 296.